EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES



Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

Exercice 1 *Soient z et z' deux complexes.*

1) Montrer que $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

2) Soit u un complexe tel que $zz' = u^2$. Montrer l'égalité

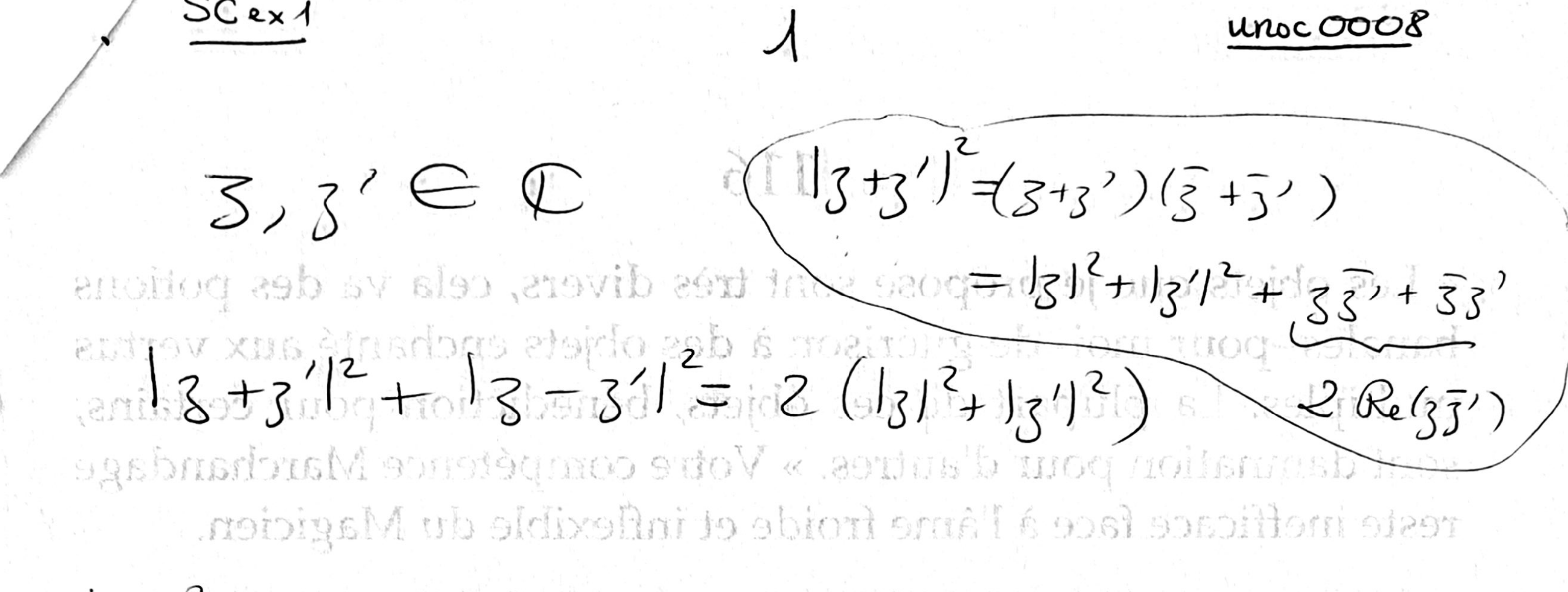
$$|z| + |z'| = \left|\frac{z+z'}{2} + u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} - u\right|.$$

Solution :

1)

[0] [unoc0008] v1.00γ http ://perso.orange.fr/megamaths/

Exercice donné à Yannick pour préparer sa rentrée à la prépa de St Cyr en septembre 2006, énoncé modifié.



$z, z' \in \mathbb{C}$

$$|z+z'|^2 = (z+z')(\bar z + \bar z') = |z|^2 + |z'|^2 + \underbrace{z\bar z' + \bar z z'}_{2\,\mathrm{Re}(z\bar z')}$$

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$$

$|z|^2 = |z^2|$

$|z| + |z'| \neq |z+z'|$

$\geq$

$|z|^2 = z\bar z$

$(x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$

$|z^2| = \sqrt{z^2 \bar z^2} = z\bar z$

---

b)

$u^2 = zz'$ $\quad \left.\begin{matrix} z = v^2 \\ z' = v'^2 \end{matrix}\right\}$

$$|z| + |z'| = \left|\frac{z+z'}{2} + u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} - u\right|$$

$$|z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'| = \underbrace{\left|\frac{z+z'}{2} + u\right|^2 + \left|\frac{z+z'}{2} - u\right|^2}_{2\left(\left|\frac{z+z'}{2}\right|^2 + |u|^2\right)} + 2\left|\frac{(z+z')^2}{4} - u^2\right|$$

$\Updownarrow$

$$|z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'| = \frac{1}{2}|z+z'|^2 + 2|zz'| + \frac{1}{2}\left|\underbrace{(z+z')^2 - 4zz'}_{(z-z')^2}\right|$$

$$2\left(|z|^2 + |z'|^2\right) = \left(|z+z'|^2 + |z-z'|^2\right.$$ oui.

SC ex1

Interp. géom

Plan $\mathcal{P}$ = Plan d'Argand-Cauchy

y — $M(z)$

1

0 1 x

$z = x + iy \in \mathbb{C}$

affixe de $M = z$

de $\vec{OM} = z$

$\|\vec{OM}\| = OM = |z|$

$M'(z')$ $N(z+z')$

affixe $z - z'$

$M(z)$

0

Traduction :

$$ON^2 + MM'^2 = 2\left(OM^2 + OM'^2\right)$$

Identité du parallélogr.

$z - z' = \text{aff}(\vec{M'M})$

$\vec{OM} - \vec{OM'} = \vec{M'M}$

Soient α, β, γ trois nombres complexes de module 1 qui vérifient

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

On désire montrer que α, β, γ sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon 1.

1°/ 1re méthode : Montrer que l'on peut se ramener au cas où $\alpha = 1$, puis écrire $\beta = e^{i\theta}$ et $\gamma = e^{i\eta}$ pour obtenir 2 équations en θ et η ... conclure.

2°/ 2e méthode : Montrer que $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$, et en déduire que α, β, γ sont racines d'un polynôme du type $X^3 - a$, où $a \in \mathbb{C}$.

1°/ $\alpha \neq 0$, et $\alpha + \beta + \gamma = 0$ sera équivalent à $1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$.
$\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{\gamma}{\alpha}$ sont des nbres complexes de module 1, et le lemme :

Lemme 1 : Si $|\beta| = |\gamma| = 1$ et $1 + \beta + \gamma = 0$, alors $\beta = e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$ et $\gamma = e^{\mp i\frac{2\pi}{3}}$

permet d'obtenir :

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = e^{\pm i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } \frac{\gamma}{\alpha} = e^{\mp i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \beta = \alpha e^{\pm i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } \gamma = \alpha e^{\mp i\frac{2\pi}{3}}$$

ce qui signifie bien que α, β, γ sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral. CQFD

Montrons donc le lemme 1 : Soit $\beta = e^{i\theta}$ et $\gamma = e^{i\eta}$

$$1 + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \cos\theta + \cos\eta = 0 & (1) \\ \sin\theta + \sin\eta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\frac{\theta+\eta}{2}\cos\frac{\theta-\eta}{2} = -1 \\ 2\sin\frac{\theta+\eta}{2}\cos\frac{\theta-\eta}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\theta+\eta}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\theta+\eta}{2} = k\pi \Rightarrow \theta = -\eta + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

En remplasant dans (1) :

$$\cos\eta = -\frac{1}{2}$$

donc $\eta = \pm \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$, puis $\theta = -\eta + k2\pi \equiv \mp \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$

Finalement $(1, \beta, \gamma) = (1, j, j^2)$ ou $(1, j^2, j)$, et tout est prouvé.

2°/ $\alpha+\beta+\gamma=0$ entraine $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0$ (puisque $\bar{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$, ...)

d'où $\frac{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=0$, puis $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$.

On déduit :

$$(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) = X^3 - \underbrace{(\alpha+\beta+\gamma)}_{=0}X^2 + \underbrace{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}_{=0}X - \alpha\beta\gamma$$

$$= X^3 - a \qquad \text{où } a \doteq \alpha\beta\gamma$$

~~Di~~
Ainsi, quitte à échanger les notations β et γ, on aura :

$$\beta = j\alpha \quad \text{et} \quad \gamma = j^2\alpha$$

et (α, β, γ) seront les affixes des sommets d'un triangle équilatéral.
CQFD

Application des nbres complexes à la géométrie :

Montrer qu'un triangle est équilatéral ssi son c.d.g coïncide avec le centre du cercle circonscrit. Connaissez-vous une démonstration géométrique de ce résultat ?

1) Supposons que $M_1M_2M_3$ soit un triangle dont le cdg coïncide avec le centre du cercle circonscrit. Dans un bon repère, on pourra alors supposer que les affixes z_k de ces sommets vérifient :

$$\begin{cases} z_k = e^{i\theta_k} \\ z_3 = 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 0 \end{cases}$$

$M_2(e^{i\theta_2})$, $M_1(1)$, $M_3(e^{i\theta_1})$, O

Tout revient donc à résoudre l'équation : $1 + e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = 0$

On obtient :

$$\begin{cases} 1 + \cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 0 & (1) \\ \sin\theta_1 + \sin\theta_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 \equiv -\theta_2 \; [2\pi] \\ \text{ou} \\ \theta_1 \equiv \pi + \theta_2 \; [2\pi] \end{cases}$$

$\theta_1 \equiv \pi + \theta_2$ entraînerait $1 + \cos(\pi + \theta_2) + \cos\theta_2 = 0$, ie $1 = 0$. Donc $\theta_1 \equiv -\theta_2$ et (1) devient :

$$1 + 2\cos\theta_1 = 0$$

$$\cos\theta_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\theta_1 \equiv \pm\frac{2\pi}{3} \; [2\pi]$$

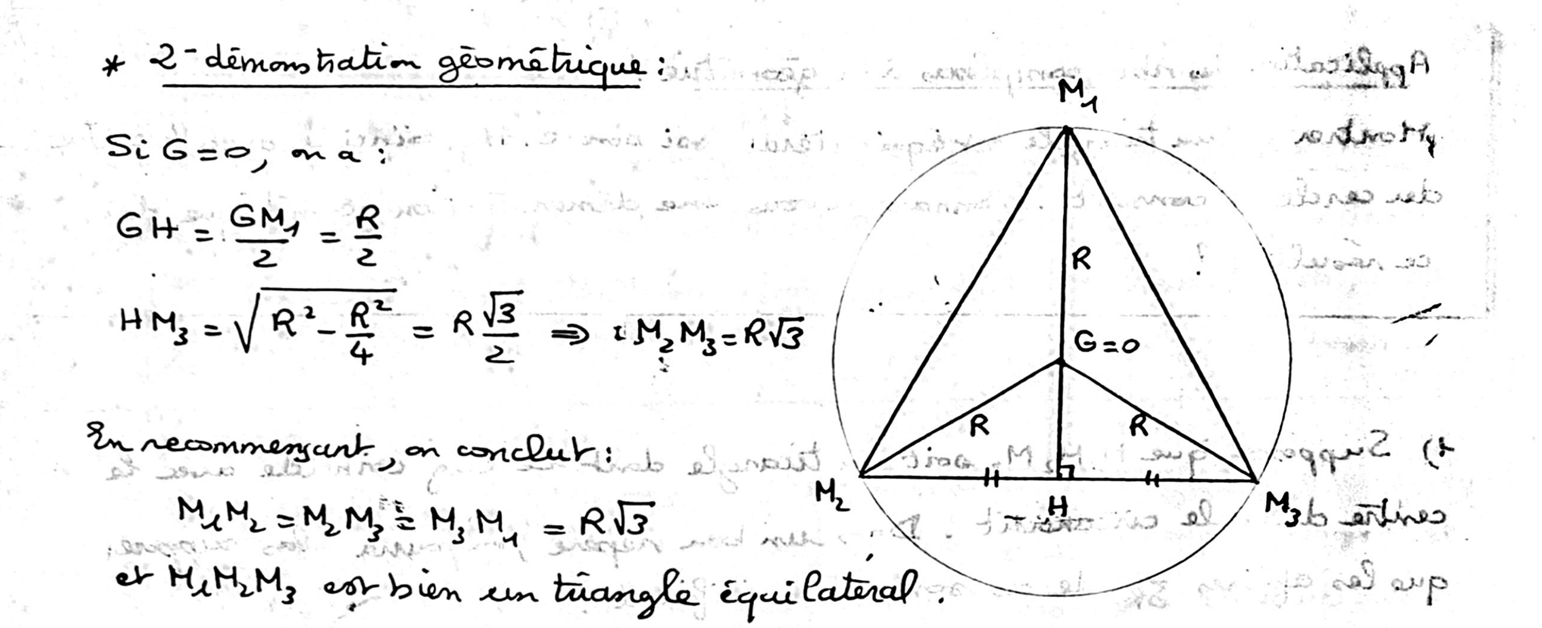
<u>Ccl</u> : $\theta_1 \equiv \pm\frac{2\pi}{3}$ et $\theta_2 \equiv \mp\frac{2\pi}{3}$. <u>Le triangle $M_1M_2M_3$ sera bien équilatéral.</u>

2) <u>Démonstration géométrique</u> :

On connaît la relation d'Euler $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$ entre le centre O du cercle circonscrit à $M_1M_2M_3$, le cdg G de ce triangle et son orthocentre H.

Ainsi $G = O$ ssi $O = H$. Mais alors (M_1O) sera à la fois hauteur de $M_1M_2M_3$ et médiatrice de $[M_2M_3]$, d'où $M_1M_3 = M_1M_2$. On recommence avec (M_2O) pour conclure à $M_1M_3 = M_1M_2 = M_2M_3$, ie $M_1M_2M_3$ <u>est équilatéral</u> □

* 2- démonstration géométrique :



Si $G = O$, on a :

$$GH = \frac{GM_1}{2} = \frac{R}{2}$$

$$HM_3 = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = R\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow M_2M_3 = R\sqrt{3}$$

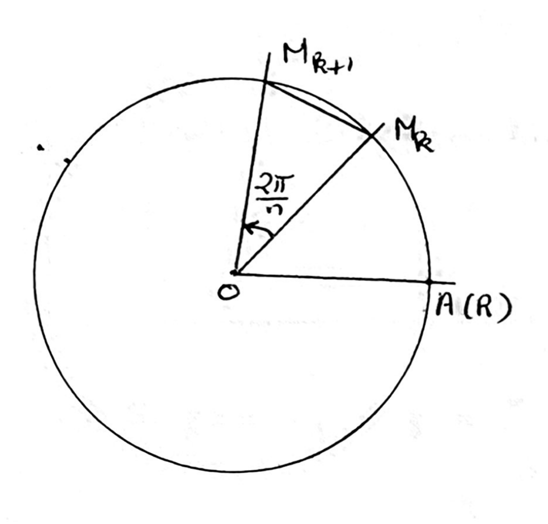
En recommençant, on conclut :

$$M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_1 = R\sqrt{3}$$

et $M_1M_2M_3$ est bien un triangle équilatéral.

NB : Dans cette 2-solution, on utilise que l'hypothèse $G = O$. L'angle droit en H n'est pas obtenu en disant que M_1H est une hauteur de $M_1M_2M_3$, mais en notant que OM_2M_3 est isocèle en O et que H est le milieu de $[M_1M_3]$.
(On prouverait aussi, de cette manière, que $G = O \Rightarrow G = O =$ orthocentre de $M_1M_2M_3$)

BAC **7** SESSION DE REMPLACEMENT
SUJET NATIONAL, SEPTEMBRE 1990 : CE. *4 points*



Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
On note C le cercle de centre O et de rayon $R > 0$ et A le point de C d'affixe R.
Étant donné un entier $n \geqslant 2$, on note r la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{n}$.
On considère la suite de points $(M_k)_{k \geqslant 0}$ de C définie par la relation de récurrence $M_{k+1} = r(M_k)$ et la condition initiale $M_0 = A$.
On note z_k l'affixe de M_k.

1. *a)* Pour tout $k \geqslant 0$, exprimer z_{k+1} en fonction de z_k.
b) En déduire l'expression de z_k en fonction de k et n.
c) Comparer M_n et M_0.
d) Faire une figure lorsque $n = 16$ (On prendra $R = 4$ cm.)

2. *a)* Prouver que, pour tout $k \geqslant 0$, $M_kM_{k+1} = 2R \sin \frac{\pi}{n}$.
b) On note $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + ... + M_{n-1}M_n$ le périmètre du polygone régulier $(M_0, M_1, ..., M_n)$.
Déterminer la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Interpréter géométriquement le résultat ainsi obtenu.

Programme abordé :
- Rotation et nombres complexes.
- Suite de nombres complexes.
- Module d'un nombre complexe et distance de deux points du plan.
- Applications géométriques.

Sol : $z_{k+1} = e^{i\frac{2\pi}{n}} z_k$ est une suite géométrique, d'où $z_k = e^{i\frac{2\pi}{n}k} z_0$

Bien sûr $z_n = z_0 \Rightarrow M_n = M_0$

La formule d'Al Kashi permet d'écrire :

$$M_kM_{k+1}^2 = OM_{k+1}^2 + OM_k^2 - 2\, OM_{k+1} \cdot OM_k \cos(\vec{OM_k}, \vec{OM_{k+1}})$$
$$= 2R^2 - 2R^2 \cos\frac{2\pi}{n} = 2R^2 - 2R^2\left(1 - 2\sin^2\frac{\pi}{n}\right) = 4R^2 \sin^2\frac{\pi}{n}$$

d'où $M_kM_{k+1} = 2R \sin\frac{\pi}{n}$.

Alors $L_n = M_0M_1 + \dots + M_{n-1}M_n = n \cdot 2R \sin\frac{\pi}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\pi R$ qui représente le périmètre du cercle $\mathcal{C}$ CQFD

Obj : • Introduire une suite géom. de nbres complexes et utiliser l'exp. complexe d'une rotation.
• Utiliser la formule d'Al Kashi, ou... rester "entre nbres complexes" en laissant le choix à l'élève...

Autre démonstration : $M_kM_{k+1} = |z_{k+1} - z_k| = |e^{i\frac{2\pi}{n}} z_k - z_k| = |e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1| R = |e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{-i\frac{\pi}{n}}| R$
$= 2R \sin\frac{\pi}{n}$ est aussi un bon choix !

Bac Ant. guy. sept 91, CE.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, on associe au pt M d'affixe z, $z \neq -3i$, le pt M' d'affixe

$$z' = \frac{z-1+i}{3-iz}$$

1) Déterminer et construire l'ensemble des pts M tq z' soit un nbre réel

2) " " l'ensemble des pts M tq $|z'| = 2$

---

1) Si $z = x+iy$, $z' = \dfrac{x-1+i(1+y)}{3+y-ix} = \dfrac{(x-1+i(1+y))(3+y+ix)}{|3+y-ix|^2}$

donc $z' \in \mathbb{R} \iff x(x-1) + (1+y)(3+y) = 0$

$\iff x^2 - x + y^2 + 4y + 3 = 0$

$\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = \frac{5}{4}$

On obtient le cercle de centre $(+\frac{1}{2}, -2)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

2) $|z'| = 2 \iff \dfrac{MA}{MB} = 2$ où $A(1-i)$ et $B(-3i)$

$\iff MA^2 - 4MB^2 = 0$ (Fct scalaire de Leibniz)

$\iff (\vec{MG} + \vec{GA})^2 - 4(\vec{MG} + \vec{GB})^2 = 0$

$\iff -3\vec{MG}^2 + GA^2 - 4GB^2 + 2\vec{MG}.\underbrace{(\vec{GA} - 4\vec{GB})}_{=0} = 0$

si G = baryc. de A(1), B(-4)

$\iff MG^2 = \frac{1}{3}(GA^2 - 4GB^2)$

Comme G d'affixe $\frac{1}{-3}(1-i-4(3i)) = -\frac{1}{3} + \frac{13}{3}i$, on trouve

$|z'| = 2 \iff MG^2 = \frac{68}{9} \iff MG = \frac{2\sqrt{17}}{3}$

et l'ensemble cherché est le cercle de centre G et de rayon $\frac{2\sqrt{17}}{3}$.

.../...

Objectif : • Savoir exprimer qu'un nbre complexe est dans $\mathbb{R}$

• Traduire un pb concernant les nbres complexes (ex $|z|=2$) en un pb géométrique faisant un programme (Fct scalaire de Leibniz)

Technique employée en 2) : Ensemble des pts M tq $\frac{MA}{MB} = k$

Autre méthode : Résoudre le 2) en explicitant $|z|^2$ en fct de partie réelle et partie imaginaire ...

Ce document a été exploité pratiquement intégralement, mais possède une saveur particulière du temps où je préparais l'agrégation

Etude de quelques transformations complexes

I Etude de $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$

* $h : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ $\quad h^2(z) = \frac{1}{\frac{1}{\bar{z}}} = z$ donc $\boxed{h^2 = Id_{\mathbb{C}^*}}$

h est involutive, donc bijective et $h^{-1} = h$.

* Si $z = x + iy$, $h(z) \doteq X + iY = \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2}$

donc $\begin{cases} X = \frac{x}{x^2+y^2} \\ Y = \frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$

*Si $z = \rho e^{i\theta}$, $Z = \frac{1}{\rho} e^{i\theta}$.

M, m(z), Z, θ

$\boxed{\overrightarrow{Om} \cdot \overrightarrow{OM} = 1}$

1°/ Image d'un cercle

$\mathcal{C} : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$m\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'affixe $z = x + iy$

$M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ d'affixe $Z = X + iY$; $h(z) = Z$ définit une transformation du plan privé de l'origine.

Si $m \in \mathcal{C}$, $\left(\frac{X}{X^2+Y^2} - a\right)^2 + \left(\frac{Y}{X^2+Y^2} - b\right)^2 = r^2$

$$\frac{X^2}{(X^2+Y^2)^2} + \frac{Y^2}{(X^2+Y^2)^2} - \frac{2aX}{X^2+Y^2} - \frac{2bY}{X^2+Y^2} + a^2+b^2-r^2 = 0$$

$$1 - 2aX - 2bY + (a^2+b^2-r^2)(X^2+Y^2) = 0 \qquad (*)$$

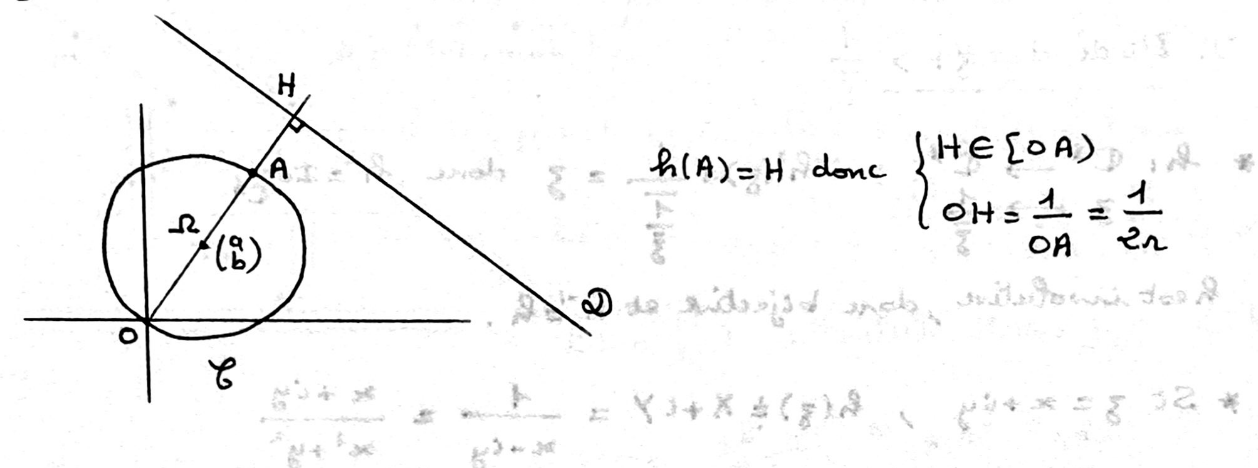
1er cas : Si $a^2+b^2 \neq r^2$ ie $O \notin \mathcal{C}$, $(*)$ est l'équation d'un cercle ne passant pas par O : $\left(X + \frac{a}{r^2-a^2-b^2}\right)^2 + \left(Y + \frac{b}{r^2-a^2-b^2}\right)^2 = \frac{r^2}{(r^2-a^2-b^2)^2}$

$h(\mathcal{C})$ est un cercle.

2ᵉ cas : Si $a^2+b^2=r^2$, ie $O \in \mathcal{C}$, $(*)$ est l'équation d'une droite $\mathcal{D}$:

$$1 - 2aX - 2bY = 0$$

$\mathcal{D}$ ne contient pas l'origine. On peut remonter les calculs de sorte que l'image du cercle $\mathcal{C}$ soit . droite $\mathcal{D}$ de vecteur normal $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



$h(A) = H$ donc $\begin{cases} H \in [OA) \\ OH = \dfrac{1}{OA} = \dfrac{1}{2r} \end{cases}$

2°/ Image d'une droite $\mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$: $ax + by + c = 0 \qquad (a,b) \neq (0,0)$

$h(m)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ vérifiera :

$$a\frac{X}{X^2+Y^2} + b\frac{Y}{X^2+Y^2} + c = 0$$

$$aX + bY + c(X^2+Y^2) = 0$$

1ᵉʳ cas : Si $c \neq 0$, ie $O \notin \mathcal{D}$, $h(\mathcal{D})$ sera un cercle passant par O privé du point O.

2ᵉ cas : Si $c = 0$ ie $O \in \mathcal{D}$, $h(\mathcal{D})$ sera la droite d'équation $aX + bY = 0$, ie $\mathcal{D}$, privée du point O.

Ccl : L'application $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ transforme les cercles-droites (éventuellement privés de O) en cercles-droites (évent. privés de O).

3°/ Interprétation géométrique

NB : Une inversion n'est pas une application affine car ne transforme pas une droite en une droite. Par contre, $i_{\Omega,k}$ transforme un cercle-droite (évent. privé de Ω) en un cercle-droite.

E plan euclidien, $k \in \mathbb{R}^*$, $\Omega \in E$.

$$i_{\Omega,k} : E \setminus \{\Omega\} \longrightarrow E \setminus \{\Omega\}$$

$$m \longmapsto M \text{ tq } \begin{cases} M \in (\Omega m) \\ \overrightarrow{\Omega m} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = k \end{cases}$$

est l'inversion de centre Ω et de rapport k.

a) Propriétés

1) $i_{\Omega,k}$ est involutive : $i^2_{\Omega,k} = Id$

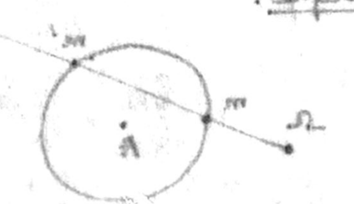
2) $i_{\Omega,k_1} \circ i_{\Omega,k_2} = h_{\Omega, \frac{k_1}{k_2}}$

3) Dans $\mathbb{C}$, $i_{\Omega,k} : z \longmapsto Z = z_0 + \dfrac{k}{\overline{z - z_0}}$ où z_0 est l'affixe de Ω.

preuve :

1) trivial

2) $m \xrightarrow{i_{\Omega,k_2}} M_1 \xrightarrow{i_{\Omega,k_1}} M$



$$\begin{cases} M_1 \in (m\Omega) \\ \overrightarrow{\Omega m} \cdot \overrightarrow{\Omega M_1} = k_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} M \in (\Omega M_1) \\ \overrightarrow{\Omega M_1} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = k_1 \end{cases}$$

M_1, m, Ω, M sont alignés donc $\overline{\Omega M} = \dfrac{k_1}{\overline{\Omega M_1}} = \dfrac{k_1}{\frac{k_2}{\overline{\Omega m}}} = \dfrac{k_1}{k_2}\overline{\Omega m}$

3) $\overrightarrow{\Omega m} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = k$ et $\overrightarrow{\Omega M} = \lambda \overrightarrow{\Omega m}$ où $\lambda = \dfrac{k}{\overrightarrow{\Omega m}^2}$.

Donc $Z - z_0 = \dfrac{k}{|z - z_0|^2}(z - z_0) = \dfrac{k}{\overline{z - z_0}}$.

<u>NB</u> : Une inversion n'est pas une application affine car ne transforme pas une droite en une droite.

Par contre, $i_{\Omega,k}$ <u>transformera un cercle-droite (évent. privé de Ω) en un cercle-droite (évent. privé de Ω)</u> : on utilise 3)

$$Z = z_0 + \frac{k}{z - z_0} \quad \text{montre que} \quad i_{\Omega,k} = t_{z_0} \circ h_{0,k} \circ i \circ t_{-z_0}$$

où

t_{z_0} = translation de vecteur d'affixe z_0

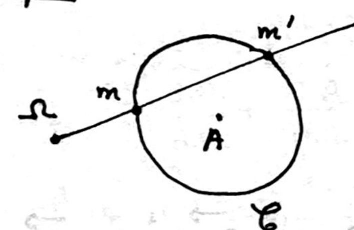
$h_{0,k}$ = homothétie de centre 0 de rapport k

i = inversion de pôle O et de rapport 1 déjà rencontrée au 1°/ et 2°/ $\left(i(z) = \frac{1}{\bar z} \right)$

D'où le résultat compte tenu des 1°/ et 2°/ (pour i) et des propriétés des homothéties-translations.

b) <u>Image d'un cercle ne passant pas par le centre de l'inversion</u>

* <u>Remarque</u> :



$p = \vec{\Omega m} \cdot \vec{\Omega m'} = \Omega A^2 - r^2 \doteq$ puissance de Ω / à $\mathcal{C}$

$i_{\Omega,p}$ <u>conserve globalement le cercle $\mathcal{C}$</u>.

* $i_{\Omega,k}$ et $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A, r)$ donnés.

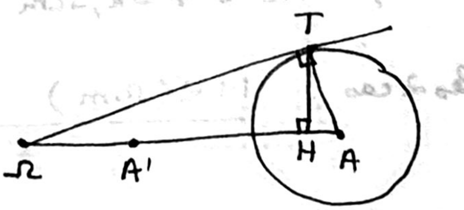
$$i_{\Omega,k} = h_{\Omega,\frac{k}{p}} \circ i_{\Omega,p} \Rightarrow i_{\Omega,k}(\mathcal{C}) = h_{\Omega,\frac{k}{p}}\big(\underbrace{i_{\Omega,p}(\mathcal{C})}_{\mathcal{C}}\big)$$

$i_{\Omega,k}(\mathcal{C})$ sera donc le cercle de centre $h_{\Omega,\frac{k}{p}}(A)$ et de rayon $\left|\frac{k}{p}\right| r$

ex : Caractériser le pt H du plan tel que $i_{\Omega,k}(H) = A'$ centre de $i_{\Omega,k}(\mathcal{C})$.

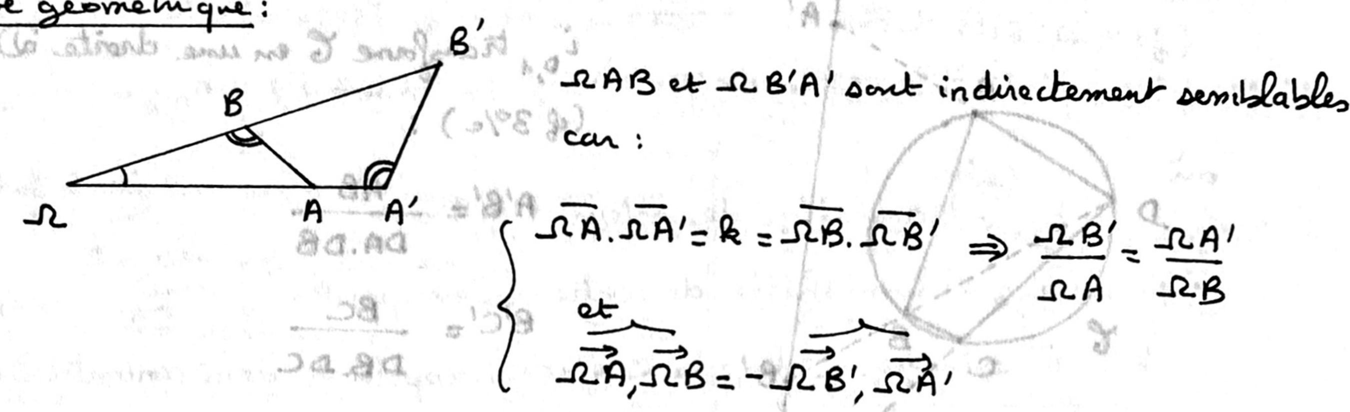
On a $i_{\Omega,k}(H) = h_{\Omega,\frac{k}{p}}(A) \Rightarrow i_{\Omega,p}(H) = A \Rightarrow \vec{\Omega A} \cdot \vec{\Omega H} = p \Rightarrow \overline{\Omega A} \cdot \overline{\Omega H} = \Omega T^2$

égalité qui prouve que H est la projection orthogonale de T sur $A\Omega$. [T]



c) $\begin{cases} i_{\Omega,k}(A) = A' \\ i_{\Omega,k}(B) = B' \end{cases} \Rightarrow A'B' = |k| \dfrac{AB}{\Omega A . \Omega B}$

Preuve géométrique :



ΩAB et $\Omega B'A'$ sont indirectement semblables car :

$$\begin{cases} \overline{\Omega A}.\overline{\Omega A'} = k = \overline{\Omega B}.\overline{\Omega B'} \Rightarrow \dfrac{\Omega B'}{\Omega A} = \dfrac{\Omega A'}{\Omega B} \\ \text{et} \\ \widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}} = -\widehat{\overrightarrow{\Omega B'}, \overrightarrow{\Omega A'}} \end{cases}$$

On déduit $\dfrac{\Omega B'}{\Omega A} = \dfrac{\Omega A'}{\Omega B} = \dfrac{A'B'}{AB} \Rightarrow A'B' = \dfrac{\Omega A'}{\Omega B}.AB = |k| \dfrac{AB}{\Omega A . \Omega B}$ oui

Preuve vectorielle :

$\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega A'} = k \Rightarrow \overrightarrow{\Omega A'} = \lambda \overrightarrow{\Omega A}$ satisfait $\lambda = \dfrac{k}{\Omega A^2}$

On aura

$$(*)\begin{cases} \overrightarrow{\Omega A'} = \dfrac{k}{\Omega A^2} \overrightarrow{\Omega A} \\ \overrightarrow{\Omega B'} = \dfrac{k}{\Omega B^2} \overrightarrow{\Omega B} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'}^2 = (\overrightarrow{A'\Omega} + \overrightarrow{\Omega B'})^2$$

$$= k^2 \left(\frac{\overrightarrow{A\Omega}}{\Omega A^2} + \frac{\overrightarrow{\Omega B}}{\Omega B^2} \right)^2$$

$$= k^2 \left[\frac{1}{\Omega A^2} + \frac{1}{\Omega B^2} + 2 \frac{\overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{\Omega B}}{\Omega A^2 . \Omega B^2} \right]$$

$$= k^2 \frac{(\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega B})^2}{\Omega A^2 . \Omega B^2} = k^2 \frac{AB^2}{\Omega A^2 . \Omega B^2}$$

CQFD

uinv0006

4°/ Théorème de Ptolémée

* ABCD quadrilatère convexe inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$

A' A D $\mathcal{C}$ C B B' C' $\mathcal{D}$

$i_{D,1}$ transforme $\mathcal{C}$ en une droite $\mathcal{D}$ et (cf 3°/c) :

$$A'B' = \frac{AB}{DA.DB}$$

$$B'C' = \frac{BC}{DB.DC}$$

$$A'C' = \frac{AC}{DA.DC}$$

$$A'C' = A'B' + B'C' \Rightarrow \frac{AC}{DA.DC} = \frac{AB}{DA.DB} + \frac{BC}{DB.DC}$$

$$\boxed{AC.DB = AB.DC + BC.DA} \quad (*)$$

diagonales — côtés opposés

* Réc., si ABCD est un quadrilatère convexe vérifiant (*), notons $i_{D,1}(A) = A'$ ... . On obtient $A'C' = A'B' + B'C' \Rightarrow A', B', C'$ alignés sur une droite $\mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ ne contient pas D donc A, B, C seront sur le cercle $i_{D,1}(\mathcal{D})$ qui contient D (cf 2°).

CQFD

II Etude de $z \mapsto az$

$z = \rho e^{i\theta}$

$Z = az \Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = |a||z| \Rightarrow OM = |a|\, Om & \text{en notant } M(Z) \text{ et } m(z) \\ \arg Z = \arg a + \arg z & [2\pi] \end{cases}$

d'où $\arg Z - \arg z = \arg a$

$\widehat{(\vec{Ox}, \vec{OM})} - \widehat{(\vec{Ox}, \vec{Om})} = \arg a$

$\widehat{(\vec{Om}, \vec{OM})} = \arg a$

M(Z)

m(z)

O

x

$f(z) = az$ est la composée de la rotation $r_{O,\arg a}$ et de l'homothétie $h_{O,|a|}$:
C'est la similitude directe de centre O, d'angle $\arg a$ et de rapport $|a|$.

III Etude de $z \overset{f}{\mapsto} az + b$ $(a, b \in \mathbb{C})$

Recherche d'un point fixe : $az_0 + b = z_0 \Leftrightarrow (1-a)z_0 = b$

1) Si $a = 1$, pas de pt fixe sauf si $b = 0$, mais alors $f = Id$. Si $b \neq 0$, $f(z) = z + b$ est une translation de vecteur d'affixe b.

2) Si $a \neq 1$, un unique pt fixe $z_0 = \dfrac{b}{1-a}$

$\begin{cases} Z = az + b \\ z_0 = az_0 + b \end{cases}$

$Z - z_0 = a(z - z_0)$ On retrouve le II : f est la similitude de centre z_0, d'angle $\arg a$ et de rapport $|a|$.

ex : Lignes de niveau de $z \mapsto |z-a|$ et $z \mapsto \arg(z-a)$.

- $|z-a| = k$, $k \in \mathbb{R}_+$ donné, équivaut à $m(z) \in \mathcal{C}(A, k)$ $A(a)$.
- $\arg(z-a) = \alpha$ $[2\pi]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ donné, équivaut à $\widehat{(\vec{Ox}, \vec{Am})} = \alpha$ $[2\pi]$.

On obtient la demi-droite issue de A faisant l'angle α avec $\vec{i}$.

A M a α O $\vec{i}$ x

IV Etude de $z \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{az+b}{cz+d}$ (transformation homographique) $(c,d) \neq (0,0)$

1°/ Généralités.

Si $c=0$, déjà traité en III

Si $c \neq 0$, f est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

$$\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a}{c} = \frac{bc-ad}{c(cz+d)}$$

montre que :

- Si $bc-ad=0$, $f(z) = \frac{a}{c} \quad \forall z$. f est constante
- Si $bc-ad \neq 0$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ et f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$.

* Supposons $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$:

$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z+\frac{d}{c}}$$

donc $f = t_{\frac{a}{c}} \circ s_{\frac{bc-ad}{c^2}} \circ s_{Ox} \circ i \circ t_{\frac{d}{c}}$

où $z \mapsto z+\alpha$ est la translation t_α

$z \mapsto \alpha z$ est la similitude directe s_α de centre O, de rapport $|\alpha|$ et d'angle $\arg \alpha$

$z \mapsto \dfrac{1}{\bar{z}}$ est l'inversion i de centre O et de rapport 1.

$z \mapsto \bar{z}$ est la symétrie $/_{\grave{a}}$ Ox, notée s_{Ox}.

Vu les propriétés des isométries, des similitudes et des inversions, f transformera les cercles-droites en cercles-droites (éventuellement privés d

2°/ Lignes de niveau de $z \mapsto \left|\frac{z-a}{z-b}\right|$ $\quad a \neq b \ ; \ a, b \in \mathbb{C}$

$\forall k \in \mathbb{R}_+ \qquad \left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k \Leftrightarrow \frac{Am}{Bm} = k \Leftrightarrow Am^2 - k^2 Bm^2 = 0 \quad (*)$

Fonction scalaire de Leibniz :

a) Si $k \neq 1$, soit G le barycentre de $A(1)$, $B(-k^2)$.

$(*) \quad AG^2 - k^2 BG^2 + (1-k^2) Gm^2 + 2\,\vec{Gm} \cdot \underbrace{(\vec{AG} - k^2 \vec{BG})}_{=0} = 0$

$$Gm^2 = \frac{k^2 BG^2 - AG^2}{1-k^2}$$

L'ensemble des m est vide ou égal à un cercle de centre G.

b) Si $k = 1$, $(*)$ $\quad Am^2 - Bm^2 = 0$

Pour tout point O : $\quad AO^2 + Om^2 + 2\,\vec{AO} \cdot \vec{Om} - (BO^2 + Om^2 + 2\,\vec{BO} \cdot \vec{Om}) = 0$

$$AO^2 - BO^2 + 2\,\vec{Om}\,\underbrace{(\vec{AO} - \vec{BO})}_{\vec{AB}} = 0$$

Prenons O milieu de AB :

$(*) \Leftrightarrow \vec{Om} \cdot \vec{AB} = 0$

Ccl : $\left\{ m(z) \ / \ \left|\frac{z-a}{z-b}\right| = 1 \right\}$ = médiatrice de AB.

3°/ Lignes de niveau de $z \mapsto \arg \frac{z-a}{z-b}$

$\alpha \in \mathbb{R}$ donné

$\arg \frac{z-a}{z-b} = \alpha \ [2\pi] \Leftrightarrow \widehat{(\vec{Bm}, \vec{Am})} = \alpha \ [2\pi] \Leftrightarrow \widehat{(\vec{mB}, \vec{mA})} = \alpha \ [2\pi]$

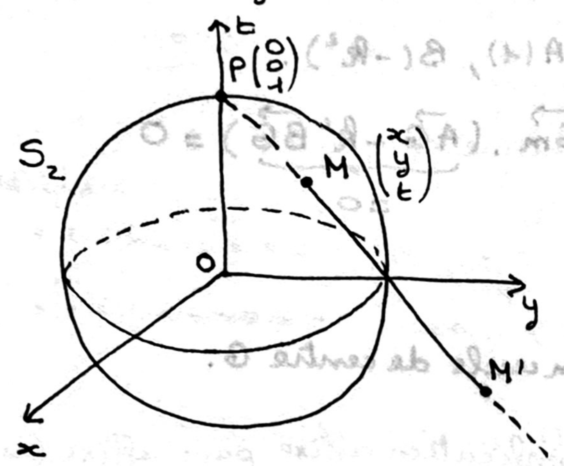
On obtient un arc de cercle d'extrémités A et B.

V Sphère de Riemann

1°/ Définition

$\mathbb{C}$ identifié au plan xOy de $\mathbb{R}^3$

S_2 = sphère $x^2+y^2+t^2=1$ de $\mathbb{R}^3$. S_2 est un e.t. compact.



$M'\begin{pmatrix}x'\\y'\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{PM'} = \lambda \vec{PM} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\y'\\-1\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}x\\y\\t-1\end{pmatrix}$

d'où $\lambda = \dfrac{1}{1-t}$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{1-t} \\ y' = \dfrac{y}{1-t} \end{cases}$$

π = projection stéréographique de pôle $P(0,0,1)$.

$$\pi : S_2 \setminus \{P\} \longrightarrow xOy \quad \text{est un homéomorphisme,}$$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\t\end{pmatrix} \longmapsto M'\begin{pmatrix}\dfrac{x}{1-t}\\ \dfrac{y}{1-t}\end{pmatrix}$$

car continue, bijective :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{1-t} = X \\ \dfrac{y}{1-t} = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (1-t)X \\ y = (1-t)Y \\ (1-t)^2(X^2+Y^2)+t^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (X^2+Y^2+1)t^2 - 2(X^2+Y^2)t + X^2+Y^2-1 = 0$$

$$\Delta' = (X^2+Y^2)^2 - (X^2+Y^2+1)(X^2+Y^2-1) = 1$$

Des 2 racines $t = \dfrac{X^2+Y^2 \pm 1}{X^2+Y^2+1}$ on ne peut retenir que celle différente de 1.

π est bien bijective, et on constate que π^{-1} est continue.

On pose $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ = compactifié d'Alexandrof de $\mathbb{C}$ = sphère de Riemann.

On prolonge π en $\overline{\pi} : S_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ en posant $\pi(P) = \infty$, et on transporte la structure d'e.t. grâce à la bijection $\overline{\pi}$.

$$\overline{\pi} : S_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \quad \text{est un homéomorphisme.}$$

2°/ Règles de calcul

$\times$ et $+$ sont généralisés à $\overline{\mathbb{C}}$ en posant pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$z + \infty = \infty \qquad z.\infty = \infty \quad si\ z \neq 0$

$\infty + \infty = \infty \qquad \infty.\infty = \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} = 1 \qquad \frac{1}{0} = \infty \qquad \frac{1}{\infty} = 0$

Enfin $\quad \overline{\infty} = \infty$

$\overline{\mathbb{C}}$ n'a cependant aucune structure algébrique classique.

3°/ Intérêt

E plan affine, en bijection avec $\mathbb{C}$.

On pose $\overline{E} = E \cup \{\omega\}$ et on prolonge l'application affixe par : affixe $(\omega) = \infty$

ω est "le point à l'infini".

$\overline{E}$ = plan anallagmatique.

Définition : Un cercle de $\overline{E}$ sera soit un cercle de E, soit la réunion d'une droite de E et du point à l'infini ω.

Avec cette définition, une inversion $i_{\Omega,k}$ transforme un cercle de $\overline{E}$ en un cercle de $\overline{E}$ (en posant $\begin{cases} i_{\Omega,k}(\Omega) = \omega \\ i_{\Omega,k}(\omega) = \Omega \end{cases}$, et vu le I).

4°/ Groupe des homographies de $\overline{\mathbb{C}}$

Soit $c \neq 0$.

On a vu que $f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ était bijective ssi $ad - bc \neq 0$.

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

Posons $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ et $f(\infty) = \frac{a}{c}$.

On prolonge ainsi f en $\overline{f} : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$. On notera encore f au lieu de $\overline{f}$, et on constate :

$f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ est bijective ssi $ad - bc \neq 0$ $z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$

Prop : L'ensemble des homographies non singulières (ie tq $ad-bc \neq 0$) de $\overline{\mathbb{C}}$ dans $\overline{\mathbb{C}}$ forme un sous-groupe du groupe des permutations $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{C}})$ isomorphe à $GL(\mathbb{C}^2)$

preuve :

A $f_i(z) = \dfrac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}$ on associe $M_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(2)$

Posons $M_i = \varphi(f_i)$. φ est bijective de $\mathcal{H} = \{$homographies non singulières$\}$ sur $GL_{\mathbb{C}}(2)$ et $\varphi(f_1 \circ f_2) = \varphi(f_1).\varphi(f_2)$.

$(\mathcal{H}, \circ)$ est donc un groupe par transport de structure. CQFD.

5°/ Groupe circulaire $\mathcal{G}$ de $\overline{E}$

C'est l'ensemble des bijections de $\overline{E}$ dans $\overline{E}$ conservant globalement les cercles de $\overline{E}$. $(\mathcal{G}, \circ)$ est un sous-groupe du groupe des permutations $\mathcal{S}(\overline{E})$ de $\overline{E}$.

Les isométries et similitudes de $\overline{E}$ (prolongées en posant $f(\omega) = \omega$) et les inversions sont toutes dans $\mathcal{G}$. La réciproque est vraie :

Théorème : $\mathcal{G}$ est engendré par les similitudes et les inversions de $\overline{E}$.

(NB : Une isométrie est une similitude de rapport 1)

preuve :

* Soit $f \in \mathcal{G}$. On peut supposer $f(\omega) = \omega$ (sinon, $f(\omega) = \Omega \neq \omega$ et l'inversion $i_{\Omega,k}$ de pôle Ω permet d'écrire $i_{\Omega,k} \circ f(\omega) = i_{\Omega,k}(\Omega) = \omega$. On prend $f' = i_{\Omega,k} \circ f$ à la place de f).

Alors l'image d'une droite de E est une droite de E, et l'image d'un cercle de E est un cercle de E.(*)

f bijective et conservant l'alignement sera une application affine (cf. Th. fondamental de la géométrie affine, Frenkel V.5 p 91)
(cf CAPES 79 2e comp.)

(*) car les dtes de $\overline{E}$ contiennent ω, mais pas les cercles de E. L'image d'une dte D de $\overline{E}$ contiendra ω et ne pourra pas être un cercle de E.

* Soit $O \in E$, $f(O)=O'$. $t_{\overrightarrow{O'O}} \circ f(O)=O$ donc $f'=t_{\overrightarrow{O'O}} \circ f$ admet O pour pt fixe.

Soit $A \neq O$. $f'(A)=A'$ et il existe une similitude s de centre O transformant A' en A. Alors $s \circ f'(A)=A$.

On travaillera dorénavant avec $f''=s\circ f' \in \mathcal{G}$ qui possède 2 points fixes O et A. La droite $\Delta = OA$ sera invariante pt par pt par f''.

* Soit $f \in \mathcal{G}$ admettant la droite Δ invariante pt par pt.

Soient $\mathcal{C}$ un cercle centré sur Δ

A et B les intersections de Δ et $\mathcal{C}$

D_A et D_B les tgtes à $\mathcal{C}$ en A et B.

$f(D_A) \,//\, f(D_B)$

$f(D_A)$ et $f(D_B)$ seront tangentes au cercle $f(\mathcal{C})$ en A et B. $f(\mathcal{C})$ est un cercle de diamètre $[AB]$ (car $f(O)=O$, $f(A)=A$, $f(B)=B$) donc $f(\mathcal{C})=\mathcal{C}$ et :

$$\begin{cases} f(D_A)=D_A \\ f(D_B)=D_B \end{cases}$$

Ccl : Toute perpendiculaire à Δ est conservée globalement par f.

Tout cercle centré sur Δ " "

* $\forall C \notin \Delta$ $\quad C_1 =$ symétrique de C / à Δ

$\mathcal{C} =$ cercle de diamètre CC_1

On aura $f(CC_1)=CC_1$ et $f(\mathcal{C})=\mathcal{C}$, donc $f(C) \in \{C, C_1\}$

→ Si $f(C)=C$, $f=Id$ car f affine laissera fixe 3 pts affinement indépendants.

→ Si $f(C)=C_1$, composons f par la symétrie s_Δ par rapport à Δ.
$s_\Delta \circ f(C)=C$ et Δ sera invariante pt par pt par $s_\Delta \circ f$, donc $s_\Delta \circ f = Id$.
ie $f=s_\Delta$.

CQFD

Corollaire : $(\mathcal{G}, \circ)$ est un groupe isomorphe au groupe des transformations complexes de $\overline{\mathbb{C}}$ dans $\overline{\mathbb{C}}$ de la forme $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ ou $z \mapsto \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ (avec $ad-bc \neq 0$)

preuve : * $\mathcal{G}$ est clairement un sous-groupe de $\mathcal{S}(\overline{E})$.

* On a vu que : $\forall f \in \mathcal{G}$ $\quad f = s_1 \circ \dots \circ s_k$ où s_i est une similitude ou une inversion.

Donc $s_i(z) = \begin{cases} az+b & \text{si } s_i \text{ est une similitude directe} \\ a\bar{z}+b & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{indirecte} \\ \dfrac{k}{\bar{z}-\bar{z}_0}+z_0 & \text{" une inversion} \end{cases}$

f s'écrira donc sous la forme $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ou $\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ avec $ad-bc \neq 0$ comme on le voit par récurrence sur k :

C'est trivial si $k=1$. Si $s_2 \circ \dots \circ s_k(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ (par ex.), de 3 choses l'une :

* Si $s_1(z) = \alpha z + \beta$ $\quad s_1 \circ \dots \circ s_k(z) = \alpha\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)+\beta$ est une homographie non singulière.

* Si $s_1(z) = \alpha\bar{z}+\beta$ $\quad s_1 \circ \dots \circ s_k(z) = \alpha\left(\dfrac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}}\right)+\beta$ est de la forme $\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ et non singulière (ie $ad-bc\dots$ comme pour les homographies)

* Si $s_1(z) = \dfrac{k}{\bar{z}-\bar{z}_0}+z_0$ $\quad s_1 \circ \dots \circ s_k(z) = \dfrac{k}{\overline{\dfrac{az+b}{cz+d}}-\bar{z}_0}+z_0$ est de la forme demandée.

On peut donc définir l'application :

$$\begin{array}{cccl} \Psi : & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{S}(\overline{\mathbb{C}}) \\ & f & \longmapsto & f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \text{ ou } \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \text{ avec } ad-bc \neq 0. \end{array}$$

* Soit G le sous-ens. de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$ constitué des transformations $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ ou $z \mapsto \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ où $ad-bc \neq 0$.

$\mathrm{Im}\,\Psi = G$ car si $f \in G$, $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ (par exemple) s'écrit $f(z) = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c(cz+d)}$ et permet d'écrire f comme composée de similitudes et d'inversions (cf IV), donc prouve que $f \in \mathrm{Im}\,\Psi$. On ferait de m̂ si $f(z) = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$. Enfin Ψ est injective.

* $\Psi(f \circ g) = \Psi(f) \circ \Psi(g)$. $\mathcal{G}$ étant un groupe, la bijection Ψ de $\mathcal{G}$ sur G permet de structurer G en groupe par transport de structure.

D'où le corollaire.

Application des nbres complexes à la géométrie :
Montrer qu'un triangle est équilatéral ssi son c.d.g coïncide avec le centre du cercle circonscrit. Connaissez-vous une démonstration géométrique de ce résultat ?

1) Supposons que $M_1M_2M_3$ soit un triangle dont le cdg coïncide avec le centre du cercle circonscrit. Dans un bon repère, on pourra alors supposer que les affixes z_k de ces sommets vérifient :

$$\begin{cases} z_k = e^{i\theta_k} \\ z_3 = 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 0 \end{cases}$$

$M_2(e^{i\theta_2})$

O $M_1(1)$

$M_3(e^{i\theta_1})$

Tout revient donc à résoudre l'équation : $1 + e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = 0$

On obtient :

$$\begin{cases} 1 + \cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 0 & (1) \\ \sin\theta_1 + \sin\theta_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \theta_1 \equiv -\theta_2 \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ \theta_1 \equiv \pi + \theta_2 \quad [2\pi] \end{cases}$$

$\theta_1 \equiv \pi + \theta_2$ entraînerait $1 + \cos(\pi + \theta_2) + \cos\theta_2 = 0$, ie $1 = 0$. Donc $\theta_1 \equiv -\theta_2$ et (1) devient :

$$1 + 2\cos\theta_1 = 0$$
$$\cos\theta_1 = -\frac{1}{2}$$
$$\theta_1 \equiv \pm\frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$$

<u>Ccl</u> : $\theta_1 \equiv \pm\frac{2\pi}{3}$ et $\theta_2 \equiv \mp\frac{2\pi}{3}$. <u>Le triangle $M_1M_2M_3$ sera bien équilatéral.</u>

2) <u>Démonstration géométrique :</u>

On connaît la relation d'Euler $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$ entre le centre O du cercle circonscrit à $M_1M_2M_3$, le cdg G de ce triangle et son orthocentre H.

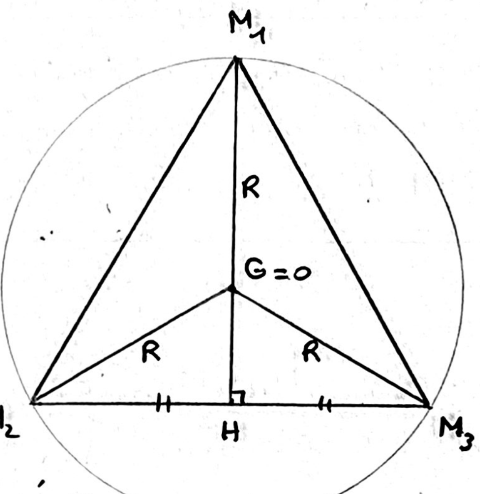
Ainsi $G = O$ ssi $O = H$. Mais alors (M_1O) sera à la fois hauteur de $M_1M_2M_3$ et médiatrice de $[M_2M_3]$, d'où $M_1M_3 = M_1M_2$. On recommence avec (M_2O) pour conclure à $M_1M_3 = M_1M_2 = M_2M_3$, ie $M_1M_2M_3$ <u>est équilatéral</u> □

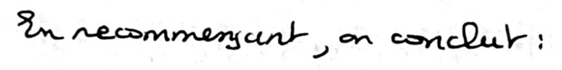
* 2- démonstration géométrique :

Si $G = O$, on a :

$$GH = \frac{GM_1}{2} = \frac{R}{2}$$

$$HM_3 = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = R\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow M_2M_3 = R\sqrt{3}$$





En recommençant, on conclut :

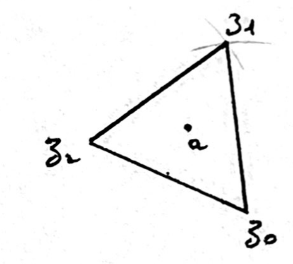
$$M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_1 = R\sqrt{3}$$

et $M_1M_2M_3$ est bien un triangle équilatéral.

Condition pour que les racines de $z^3+3pz^2+3qz+r=0$ soient les affixes de sommets d'un triangle équilatéral ? $(p,q,r\in\mathbb{C})$

Lemme : z_0, z_1, z_2 sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral de cdg $a\in\mathbb{C}$ ssi :

$$\begin{cases} z_1-a = j(z_0-a) \\ z_2-a = j^2(z_0-a)\end{cases}$$



(évident : rotation de centre a et d'angle $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$)

* **1er cas : $a=0$** $\begin{cases} z_1=jz_0 \\ z_2=j^2z_0\end{cases}$ sont solutions de $z^3+3pz^2+3qz+r=0$ ssi

$$\begin{cases} 3p = -\sigma_1 = -(z_0+jz_0+j^2z_0)=0 \\ 3q = \sigma_2 = z_0z_1+z_0z_2+z_1z_2 = jz_0^2+j^2z_0^2+z_0^2=0 \\ r=-z_0^3\end{cases}$$

et l'équation s'écrit alors $z^3-z_0^3=0$.

Ccl : Les racines de $z^3+3pz^2+3qz+r=0$ sont les sommets d'un tri. équil. de cdg 0 ssi $p=q=0$

* **2e cas : $a\neq 0$** On fait la translation $z=Z+a$ pour se ramener au 1er cas.

L'équation s'écrit :

$$(Z+a)^3+3p(Z+a)^2+3q(Z+a)+r=0$$

soit $$Z^3+3(a+p)Z^2+3(a^2+2ap+q)Z+r+3aq+3a^2p+a^3=0$$

D'après le cas précédent, cette dernière équation admettra Z_0, Z_1, Z_2 pour racines telles que $\begin{cases} Z_1=jZ_0 \\ Z_2=j^2Z_0\end{cases}$ (cf lemme) ssi : $\begin{cases} 3(a+p)=0 \\ 3(a^2+2ap+q)=0\end{cases}$

ie ssi $\boxed{\begin{cases} a=-p \\ q=p^2\end{cases}}$

Conclusion : La CNS cherchée est $q=p^2$. Alors l'équation s'écrit :

$$z^3+3pz^2+3p^2z+r=0 \quad \text{ie} \quad (z+p)^3+r-p^3=0$$

, et le cdg du triangle a pour affixe $-p$.